Úloha 3

Bifurkace

-rozbor rovnic krystalové plasticity
-nekonečné prostředí,nulové objemové síly
-konstanty B,F,A_0,b,P,k,r_θ jsou kladné
-(konvence označení je stejná jako v zadání úlohy)

Výsledkem rozboru rovnic lineární poruchovou analýzou je lineární systém rovnic pro amplitudy $\hat{\gamma}, \hat{\sigma}_{xy}, \hat{\rho}, \hat{v}, \hat{\beta}, \hat{c}_d$. Provedeme rozbor podmínky existence netriviálního řešení,tedy v případě,že je determinant soustavy roven nule.

Determinant soustavy je roven:

$$\det = \{b^2 \rho_0 E(2k_x^2 k_y^2 + (1-\upsilon)k_z^2 K^2) + K^4(1-\upsilon^2)[v_0 B(-k_x \sin\beta_0 + k_z \cos\beta_0)i +$$

$$B\omega + \kappa(k_x \cos\beta_0 + k_z \sin\beta_0)^2 + P\rho_0(k_x \sin\beta_0 - k_z \cos\beta_0)^2 + A_0 b \rho_0 F]\} \frac{\rho_0 \omega^2}{E}$$

a požadujeme:

$$\det = 0 \qquad . \tag{1}$$

Rozbor pro případ B≠0:
0.) (1) je triviálně splněna pro $\rho_0=0$,pro $\omega=0$,pro K=0.
1.) Dále uvažujme případ kdy $\rho_0\neq 0$, $\omega\neq 0$,K≠0. Nutnou podmínkou ke splnění (1) je,aby jak reálná tak imaginární část determinantu byly rovny nule.

$$\mathrm{Im} = v_0 B(-k_x \sin\beta_0 + k_z \cos\beta_0) = 0 \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Re} = {} & b^2 \rho_0 E(2k_x^2 k_y^2 + (1-\upsilon)k_z^2 K^2) + K^4(1-\upsilon^2)[B\omega + \kappa(k_x \cos\beta_0 + k_z \sin\beta_0)^2 \\ & + P\rho_0(k_x \sin\beta_0 - k_z \cos\beta_0)^2 + A_0 b \rho_0 F] = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

Podmínka (2) splněna pro:

$$v_0=0 \tag{4}$$

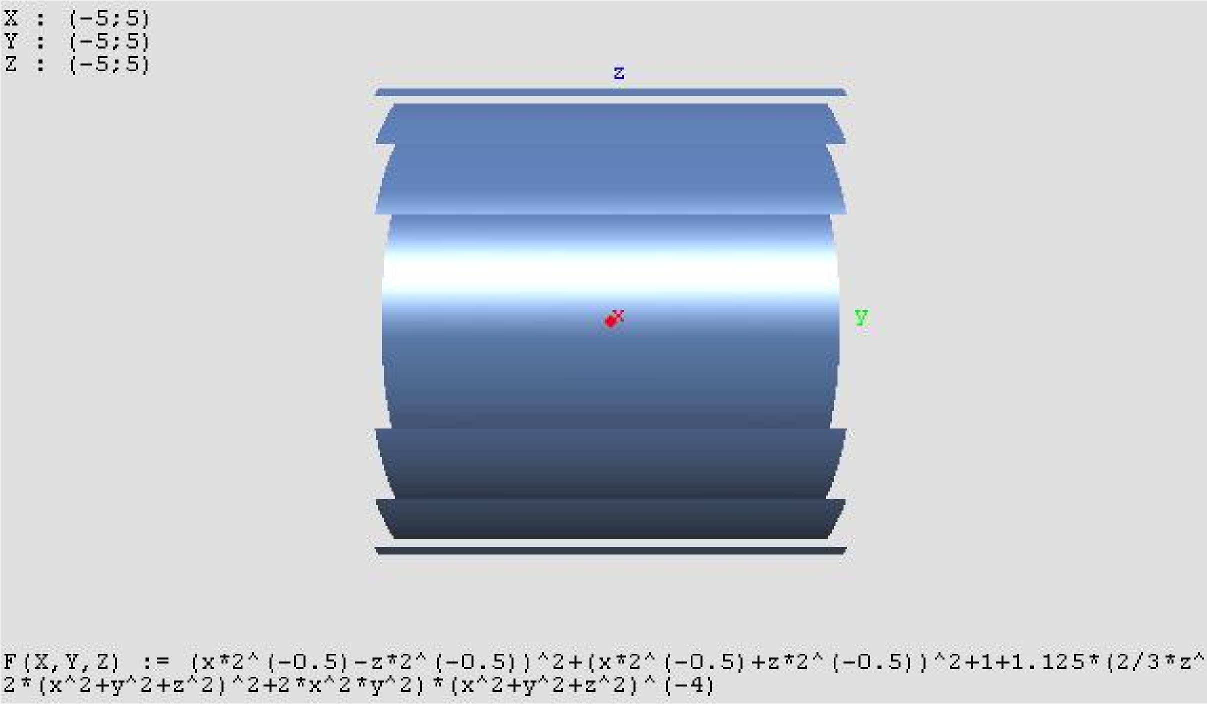
B=0

$$-k_x \sin\beta_0 + k_z \cos\beta_0 = 0 \tag{5}$$

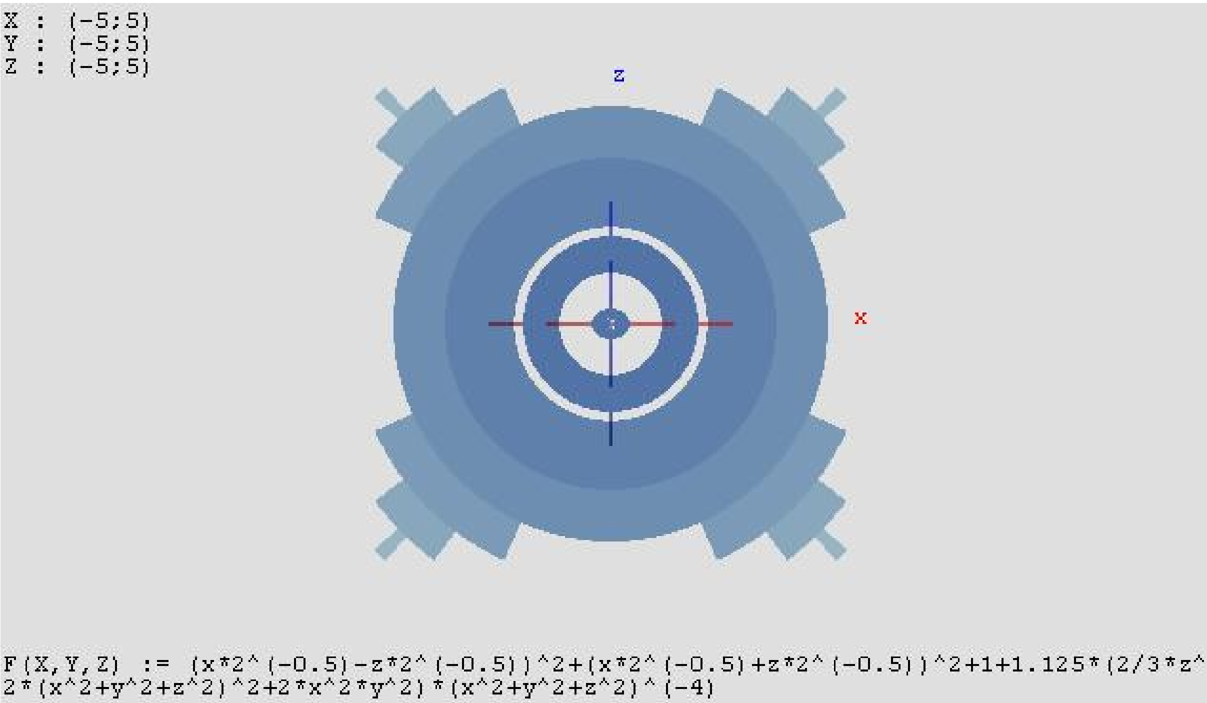
i) Nechť je splněna podmínka (4):
ρ_0 je homogenní řešení hustoty dislokací,proto soudím že by mělo být nezáporné. Uvažujme tedy ρ_0 nezáporné a navíc vezměme v úvahu 0.),potom je $\rho_0>0$.
V tomto případě z (3) plyne,že musí být $\omega\leq 0$. Z rovnice (3) plyne,že přípustný útlumový faktor ω závisí na vlnovém vektoru $\vec{k}$:

$$\omega = -\left[\frac{b^2 \rho_0 E(2k_x^2 k_y^2 + (1-\upsilon)k_z^2 K^2)}{K^4(1-\upsilon^2)} + \kappa(k_x \cos\beta_0 + k_z \sin\beta_0)^2 + P\rho_0(k_x \sin\beta_0 - k_z \cos\beta_0)^2 + A_0 b \rho_0 F\right] / B \tag{6}$$

Kvalitativní představu o tvaru závislosti nám poskytne rozbor pro hodnoty konstant *n*=1/3,B=1,E=1,F=1,A_0=1,b=1,P=1,k =1, ρ_θ=1,b_0=π/4 (viz.obr.č.1,2).

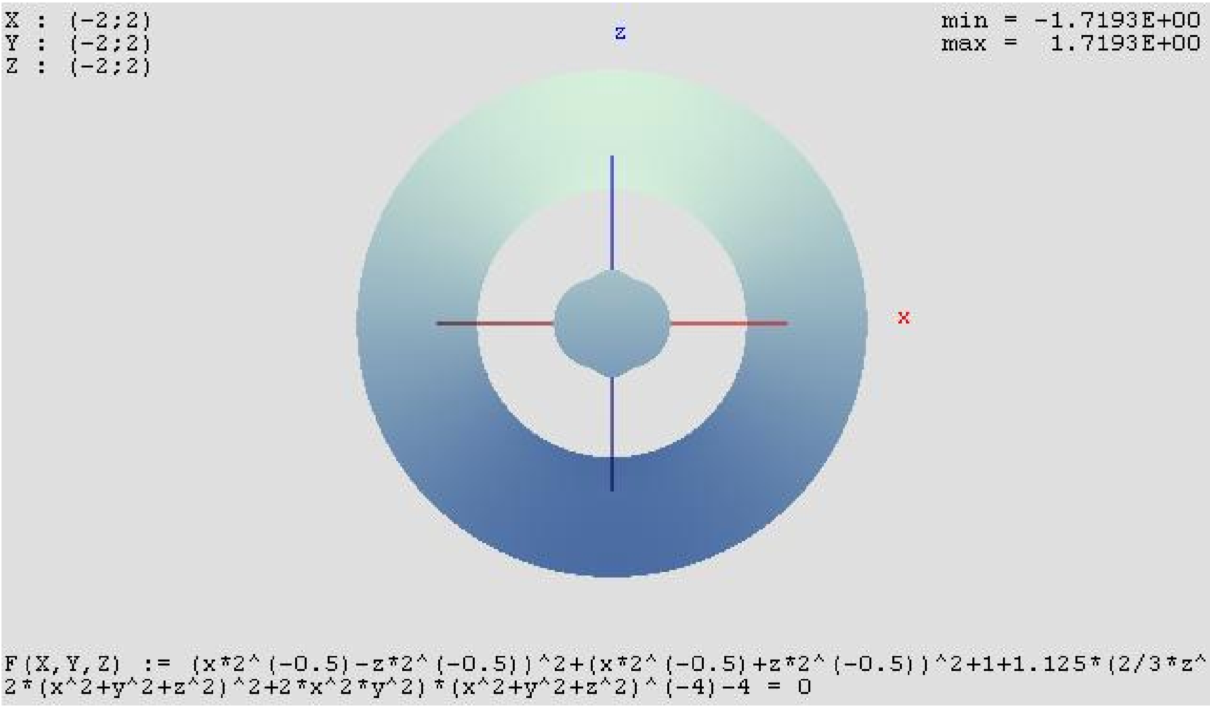


obr.č.1 Isoplochy – plochy tvořené podle rovnice ω=konstanta={-3,-4,-5,…}, jsou tvořeny vždy rotačním útvarem,který se od válce liší jen mírným zužováním při přibližování k rovině xz, a útvarem okolo počátku (k_x=x, k_y=y, k_z=z).

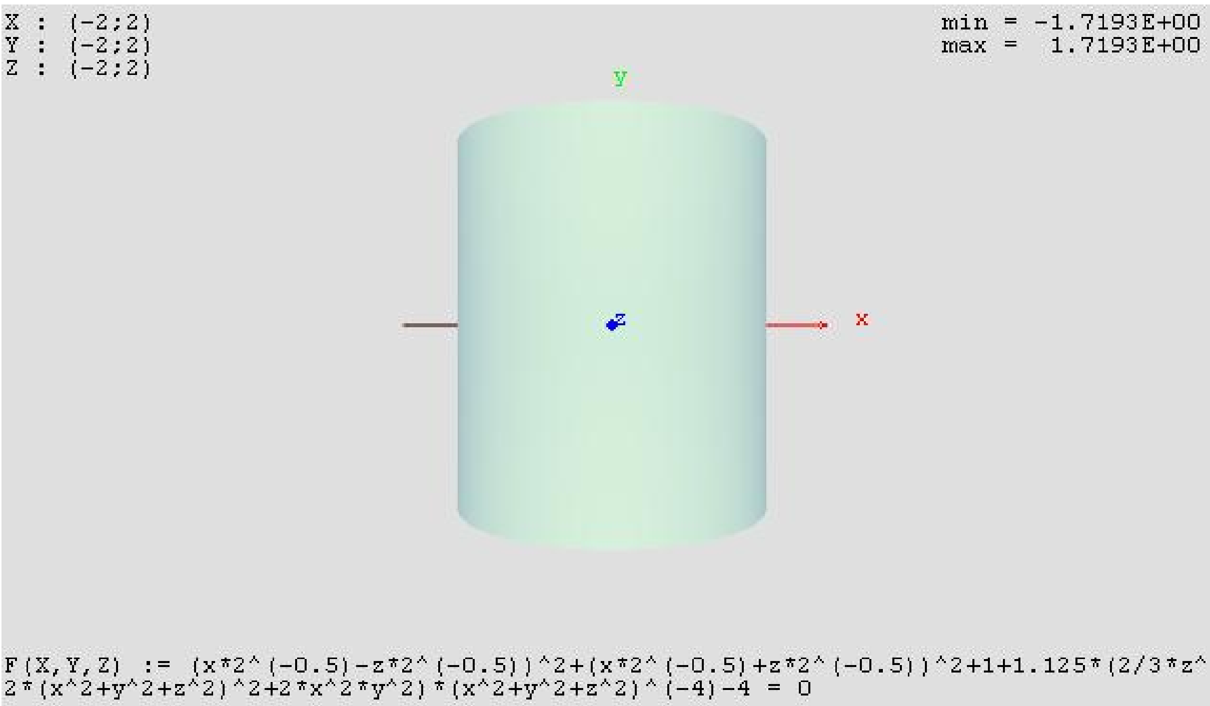


obr.č.2 Isoplochy

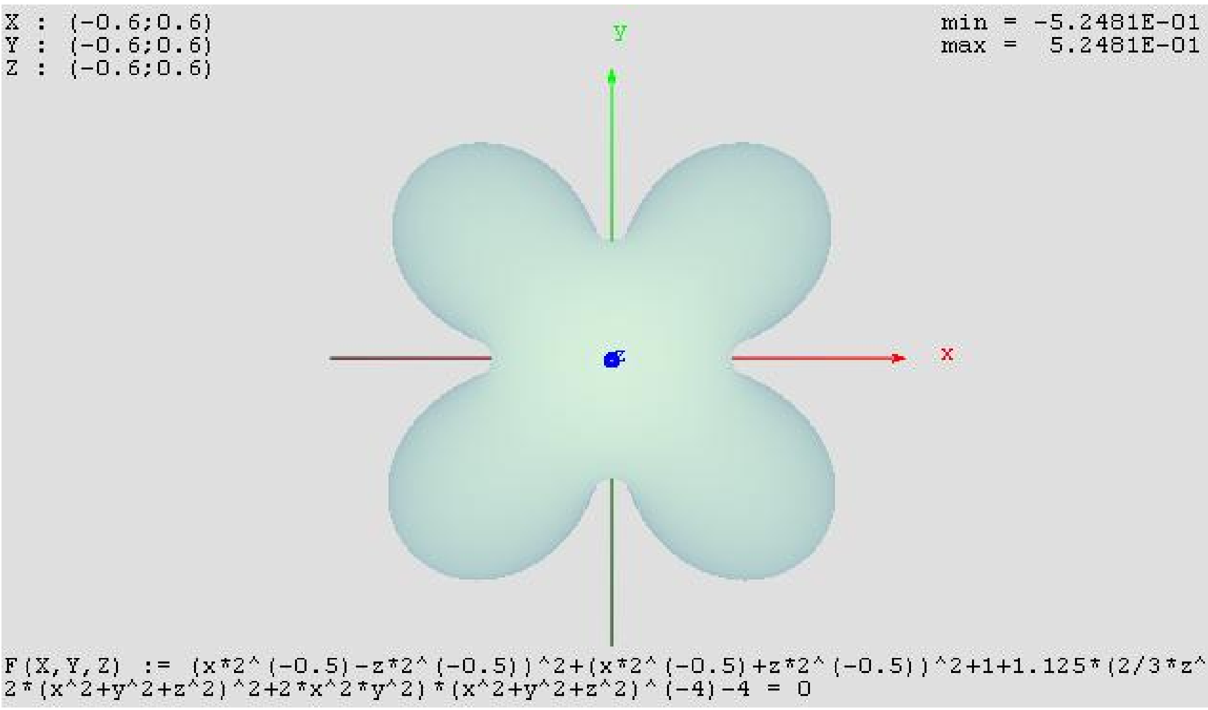
Lze rozlišit dva kvalitativně odlišné případy. Pro $\omega < -\sqrt{3} - 1$ je typickým tvar jako na obr.č.3-8.



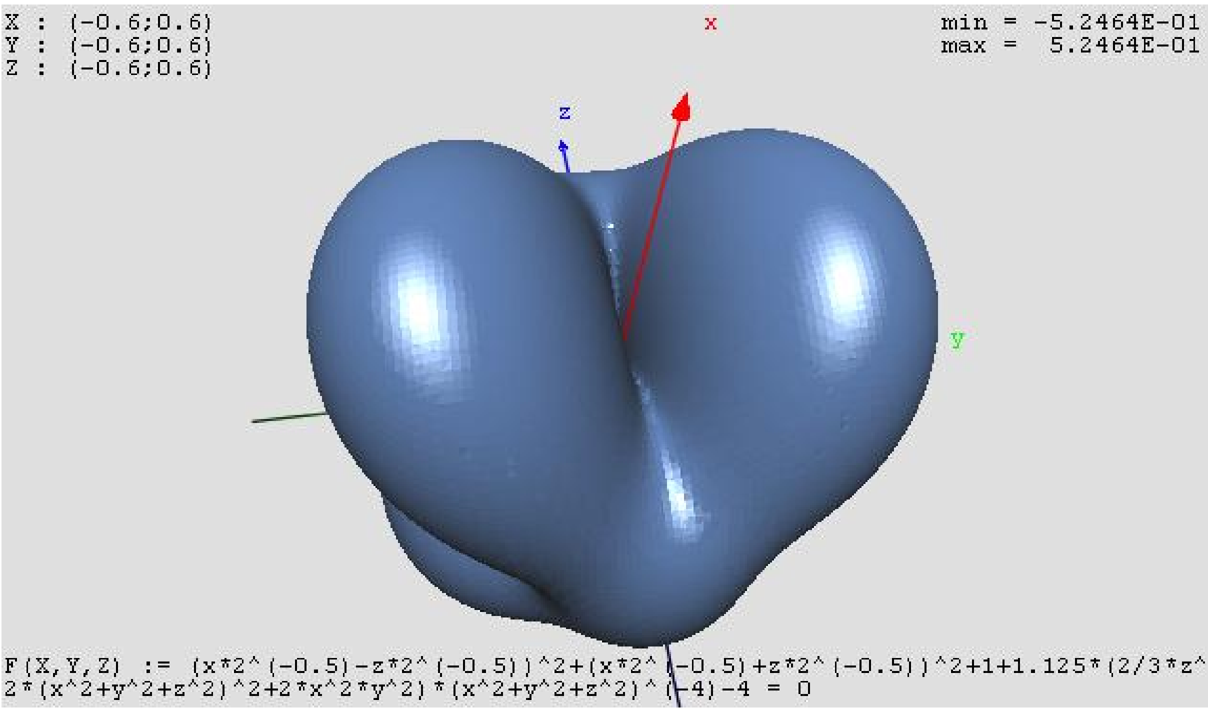
obr.č.3 ω=-4, pohled na rovinu xz



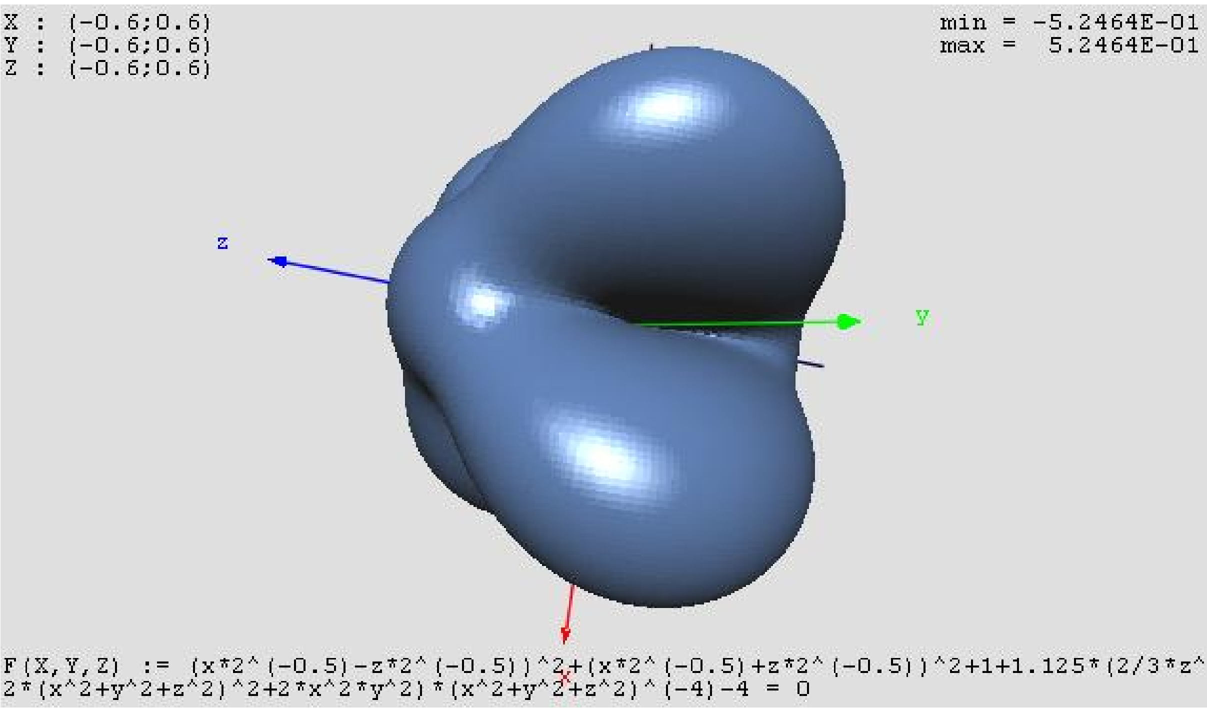
obr.č.4 ω=-4, pohled na rovinu xy, útvar se liší od válce mírným zužováním při přibližování k rovině xz přibližování k rovině xz



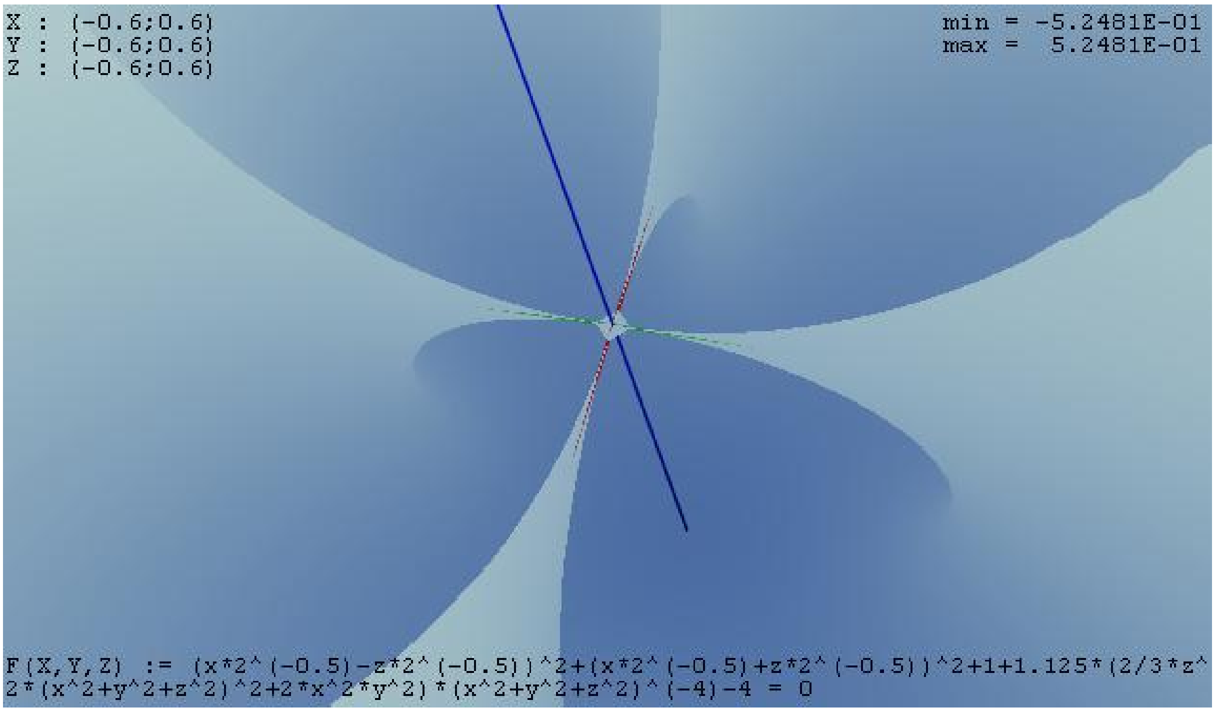
obr.č.5 ω=-4, detail na útvar okolo počátku



obr.č.6

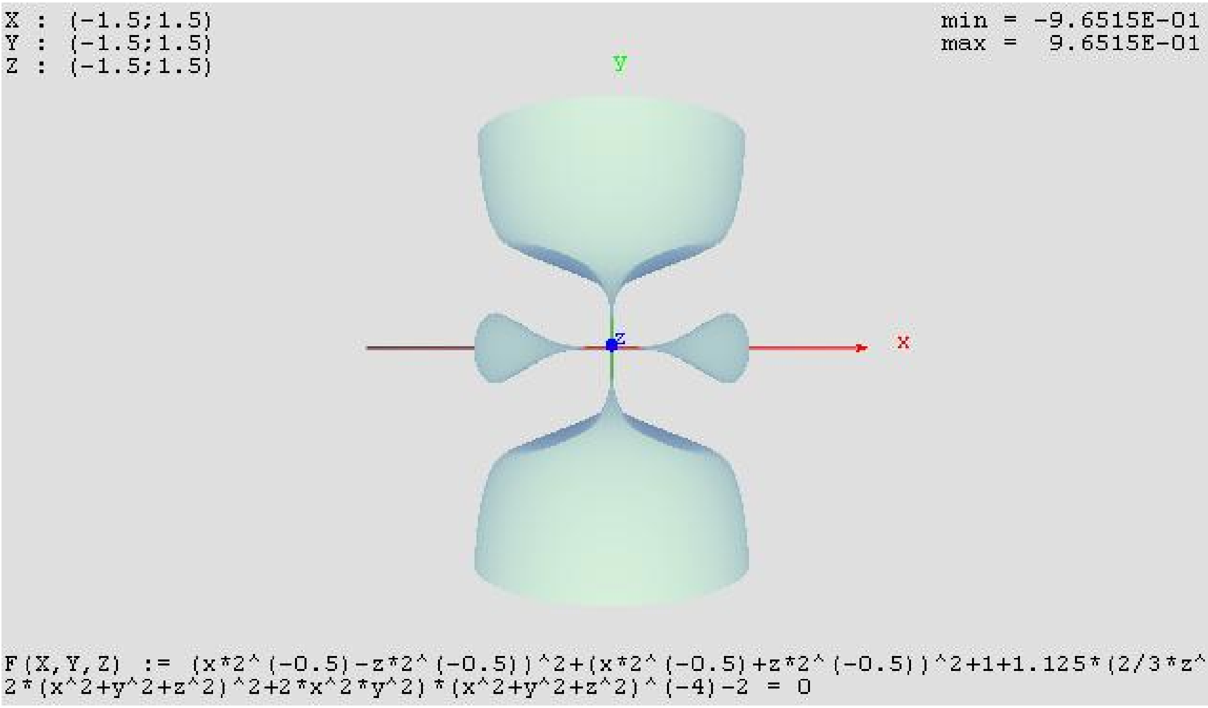


obr.č.7

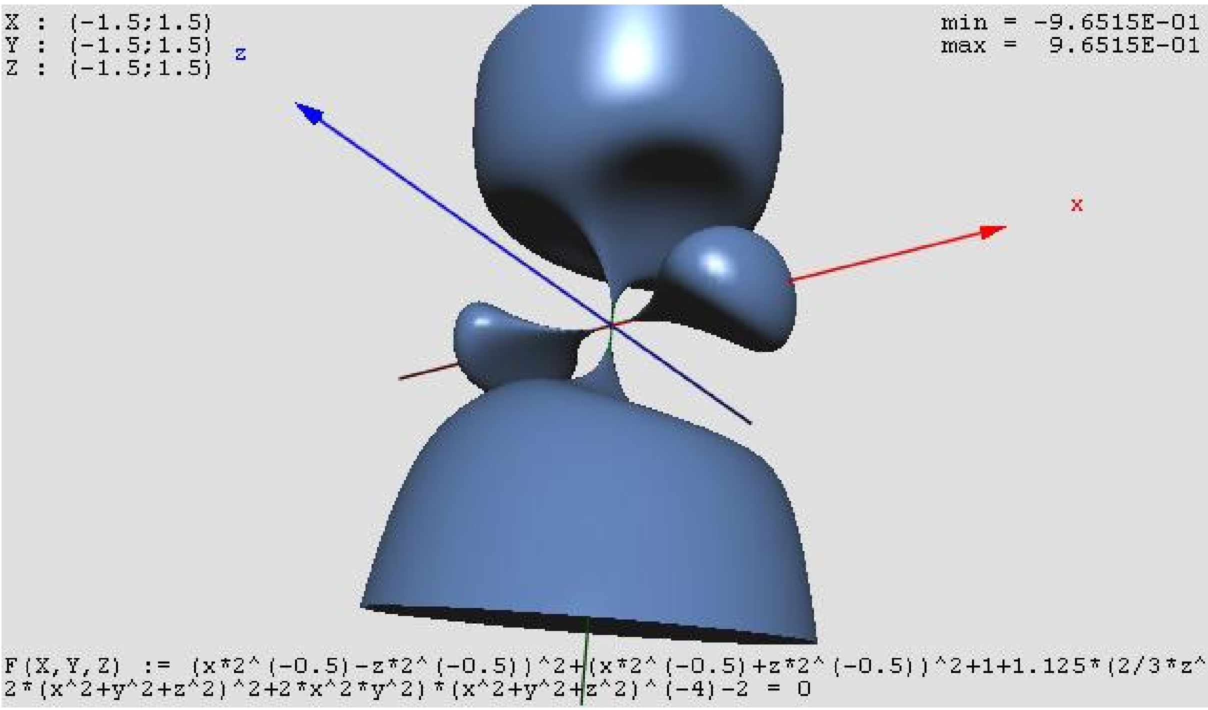


obr.č.8 pohled „zevnitř“, okolo počátku se nachází chyba ve vykreslování ve tvaru čtverce, ve skutečnosti má útvar v počátku singularitu k níž se přibližuje „nálevkami“ ze směru osy x a y

Pro případ $\omega > -\sqrt{3} - 1$ viz obr.č.9,10.

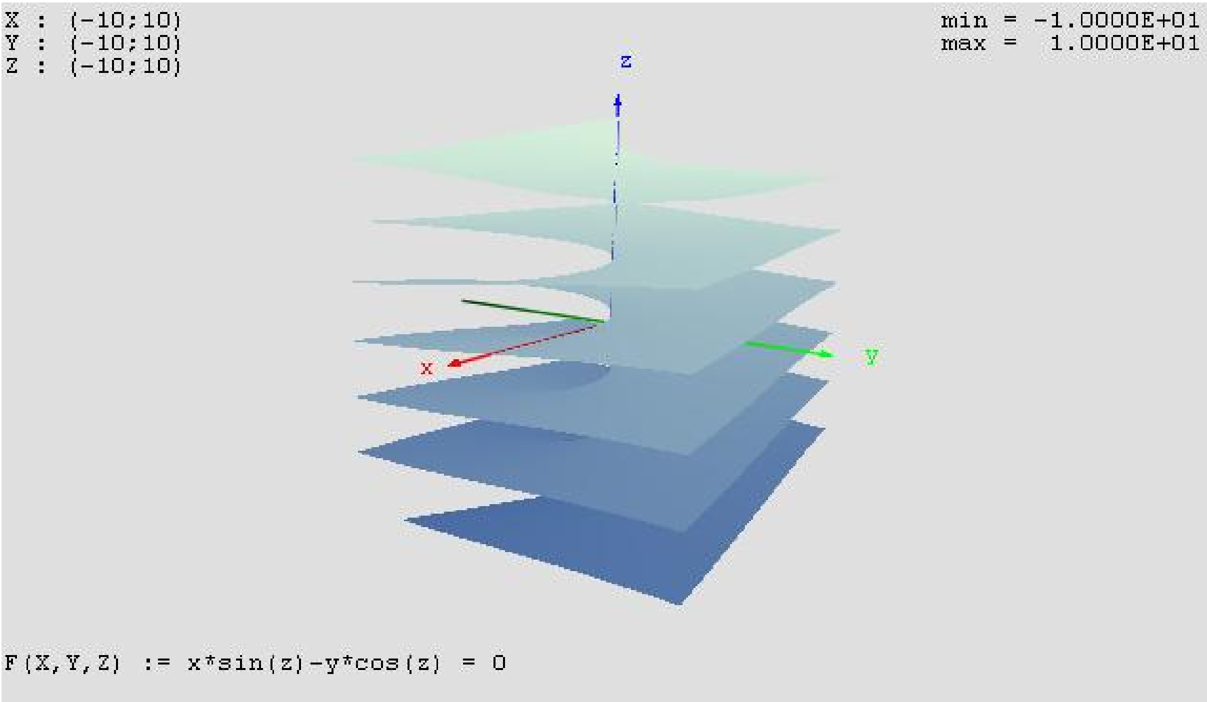


obr.č.9 ω=-2, do singularitu v počátku se propadá útvar blížící se asymptoticky k váleci zevnitř



obr.č.10 ω=-2

ii) Nechť je splněna podmínka (5) (viz obr.č.11):



obr.č.11 $k_x \sin\beta_0 - k_z \cos\beta_0 = 0$, kde $k_x = x, k_z = y, \beta_0 = z$

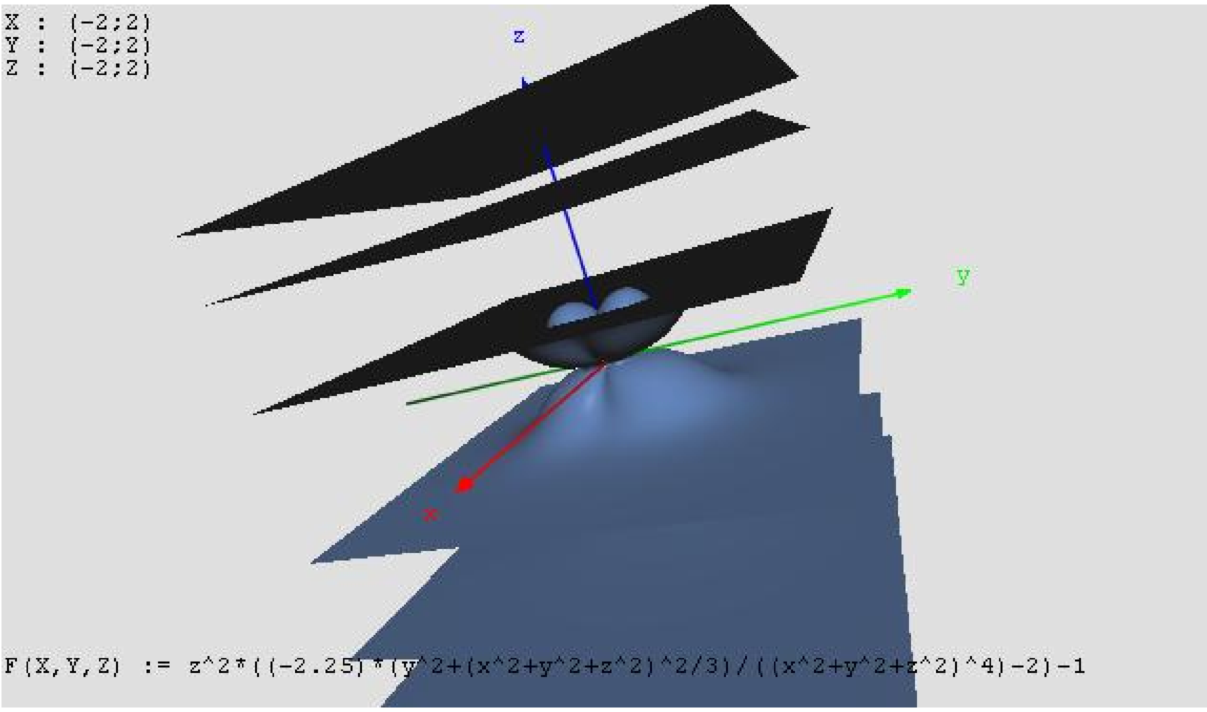
Vzhledem k (5) lze upravit rovnici (3) na tvar:

$$(2k_y^2\cos^2\beta_0 + \sin^2\beta_0(1-\upsilon)K^2)k_z^2 b^2 \rho_0 E + (1-\upsilon^2)K^4(\sin^2\beta_0 b\rho_0 FA_0 + \sin^2\beta_0 \omega B + \kappa k_z^2) = 0 \tag{7}$$

Pokud b_0=0 pak k_z=0 a rovnice (7) je identicky splněna. Uvažujme tedy tyto veličiny nenulové,pak přípustný útlumový faktor pak musí splňovat:

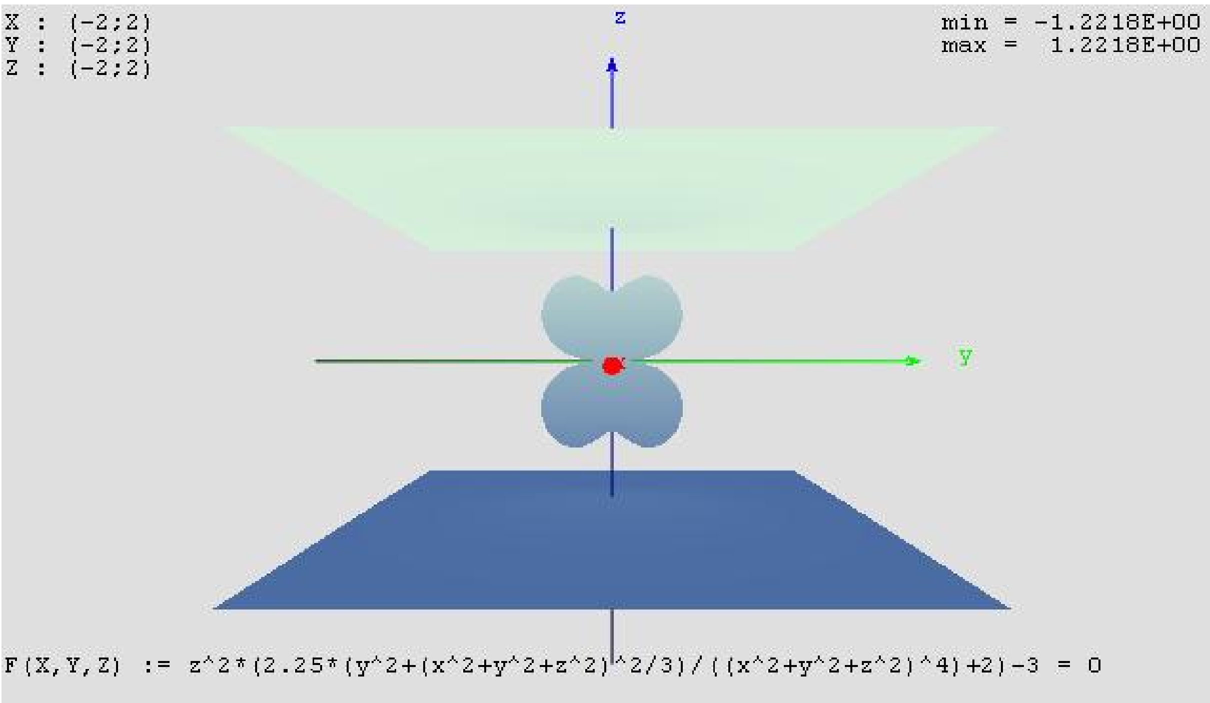
$$\omega = -\left[\frac{(2k_y^2\cos^2\beta_0 + \sin^2\beta_0(1-\upsilon)K^2)k_z^2 b^2 \rho_0 E}{(1-\upsilon^2)K^4} + (\sin^2\beta_0 b\rho_0 FA_0 + \kappa k_z^2)\right] / (\sin^2\beta_0 B) \tag{8}$$

Závislost w na $\vec{k}$ si opět ukážeme pro speciální konstanty *n*=1/3, B:=1,E:=1, F:=1, A_0:=1,b:=1,P:=1,k =1,r_θ=1,b_0=p/4 (viz.obr.č.12).

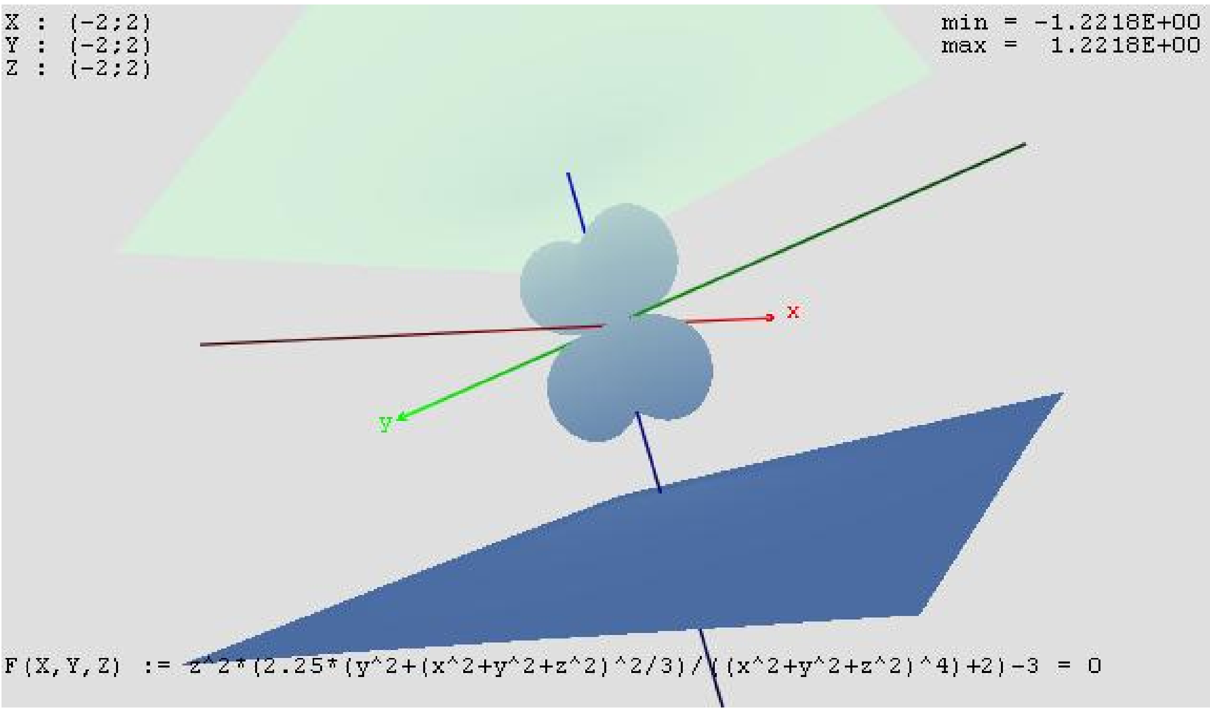


obr.č.12 Isoplochy ω={-2-3,-4,-5,…}

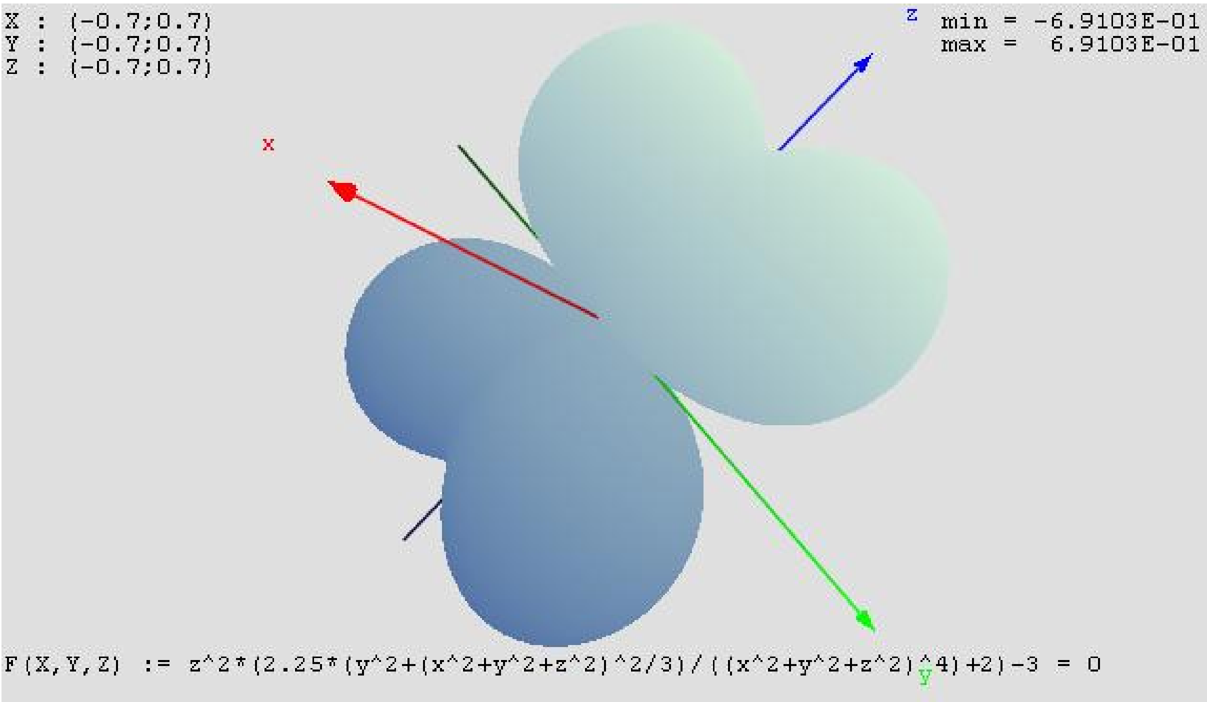
Opět rozlišíme dvě možnosti: pro $\omega < -\sqrt{6} - 1$ viz obr.č.13-16.



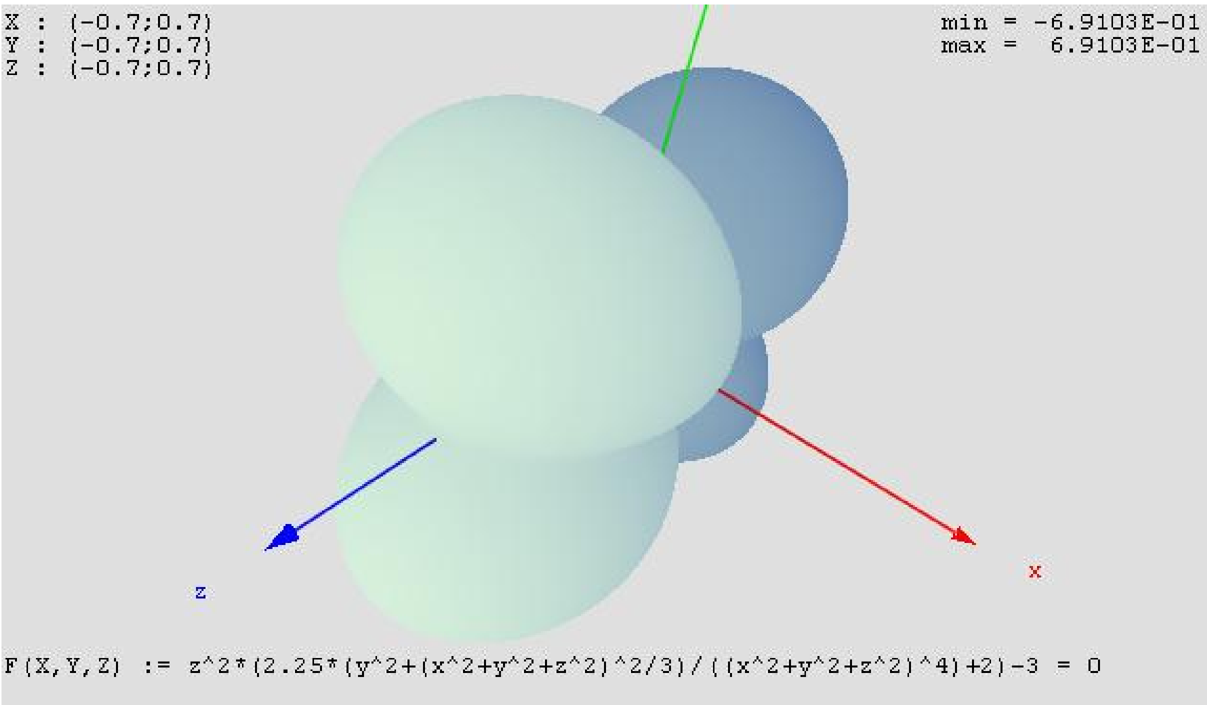
obr.č.13 ω=-4, útvar je zrcadlově symetrický podle roviny xy, v poloprostoru leží „fazole“, která se asymptoticky blíží počátku a plocha lišící se od roviny propadáním se v blízkosti osy z



obr.č.14 ω=-4



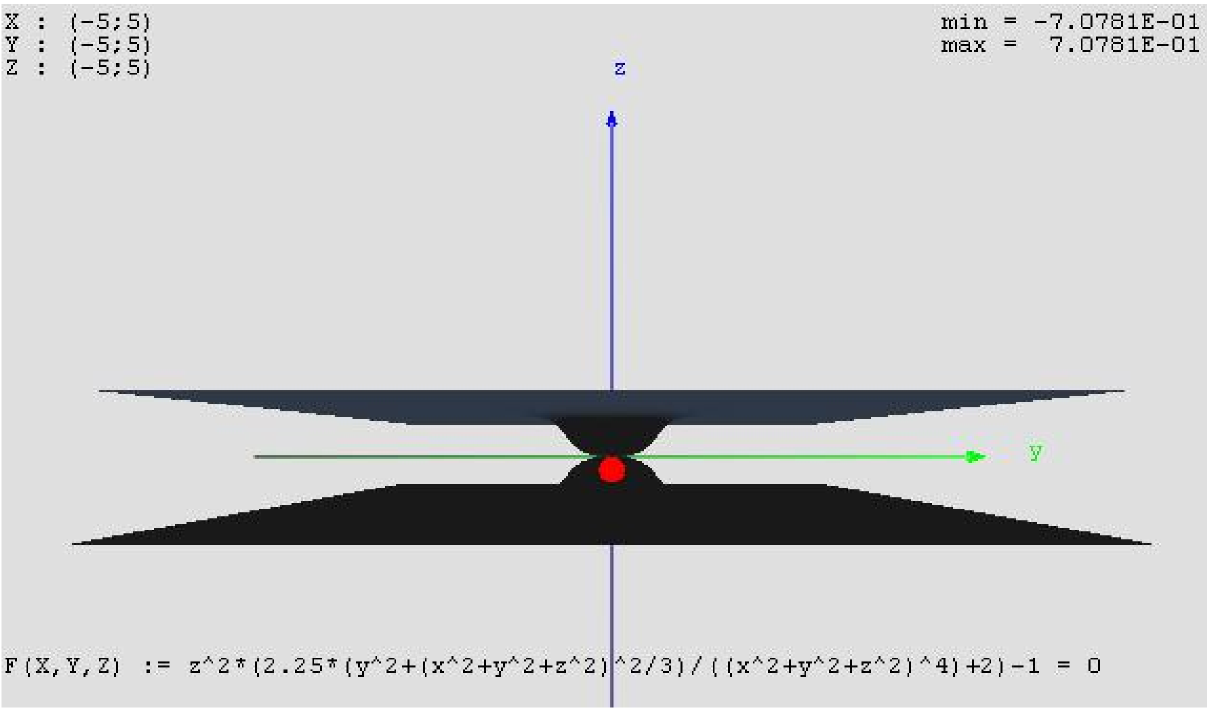
obr.č.15 ω=-4



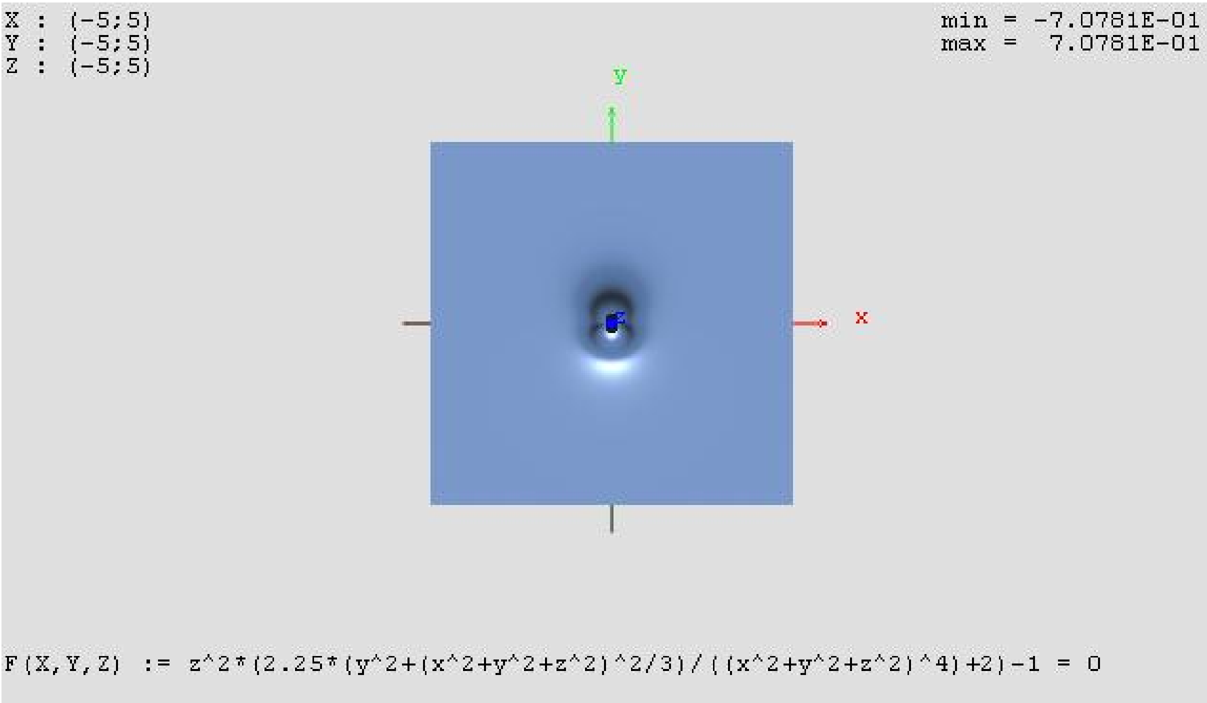
obr.č.16 ω=-4

Pro $\omega > -\sqrt{6} - 1$ viz obr.17-19

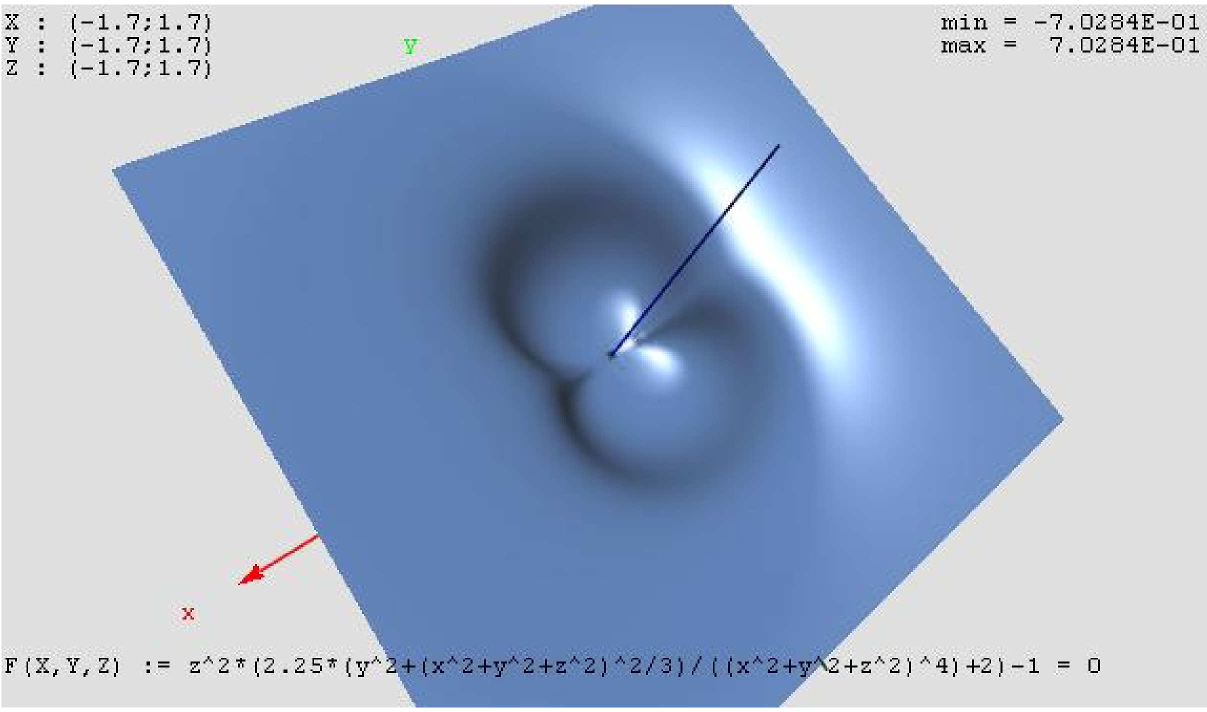
.



obr.č.17 ω=-2, plochy jsou zrcadlově symetrické podle xy



obr.č.18 ω=-2



obr.č.19 ω=-2, detail na tvar „prohlubně“